2.7.15 Mocniny s racionálním mocnitelem

Předpoklady: 020714

Racionální číslo - číslo, které je možné zapsat zlomkem.
Co už umíme s mocninami?
Víme, co znamená:

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
- $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2}$
- Ale co znamená $2^{\frac{2}{3}}$?

Porovnáme pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami:

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$(ab)^n = a^n b^n$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\left((a)^r\right)^s = a^{sr}$

Odmocniny a mocniny se chovají stejně a to určitě nebude samo sebou!
Nejsou odmocniny speciálním typem mocnin?

Pedagogická poznámka: Studenty vyzvu, aby sami vymysleli, jakým racionálním číslem by bylo možné zapsat $\sqrt{2}$. Je zajímavé, že se vždy objeví pár návrhů na $\frac{1}{2}$ a téměř nic jiného. Bohužel většinou jde pouze o návrhy bez pořádného zdůvodnění. Snažíme se poté diskutovat, jaké dobré důvody existují pro nahrazení odmocniny mocninou na jednu polovinu.

Zkusíme zjistit, jaký exponent by byla druhá odmocnina:

$\sqrt{2} = 2^p$ použijeme $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2^1$.

$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(2^p\right)^2 = 2^1$

$2^{2p} = 2^1$

$2p = 1$

$p = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Možná platí: $\sqrt{2} = (2)^{\frac{1}{2}}$.

Zkusíme, zda funguje upravování odmocnin.

Př. 1: Spočti: $\left(\sqrt{2}\right)^3$ a $\sqrt{2^8}$ do dvou sloupců, jednak klasicky pomocí vzorců pro úpravy odmocnin a jednak nahrazením $\sqrt{(\ )} = (\ )^{\frac{1}{2}}$ a použitím vzorců pro úpravy mocnin.

Úprava pomocí vzorců pro odmocniny. Úprava pomocí vzorců pro mocniny (používáme $\sqrt{(\ )} = (\ )^{\frac{1}{2}}$).

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^1\, 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2^8} = \sqrt{\left(2^4\right)^2} = 2^4$$

$$\sqrt{2^8} = \left(2^8\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{8\cdot\frac{1}{2}} = 2^4$$

U všech předchozích výpočtů bychom místo $\sqrt{(\ )}$ mohli psát $(\ )^{\frac{1}{2}}$. Zdá se, že pro druhou odmocninu platí: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Jak je to se třetí odmocninou?

Př. 2: Navrhni nahrazení třetí odmocniny mocninou.

$\sqrt[3]{a} = a^p$ použijeme $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left(a^p\right)^3 = a^1$

$a^{3p} = a^1$

$3p = 1$

$p = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{a} = (a)^{\frac{1}{3}}$

Př. 3: Podobně jako v příkladu 1 ověř, že je možné třetí odmocninu nahradit racionálním mocnitelem.

Zkoušíme $\sqrt[3]{a} = (a)^{\frac{1}{3}}$.

Úprava pomocí vzorců pro odmocniny.

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^7 = \sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a} = \sqrt[3]{a^6}\,\sqrt[3]{a} = a^2\sqrt[3]{a}$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^{12} = \sqrt[3]{\left(a^4\right)^3} = a^4$$

Úprava pomocí vzorců pro mocniny (používáme $\sqrt[3]{(\ )} = (\ )^{\frac{1}{3}}$).

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^7 = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^7 = a^{\frac{7}{3}} = a^{2+\frac{1}{3}} = a^2\, a^{\frac{1}{3}} = a^2\sqrt[3]{a}$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^{12} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{12} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$$

Pedagogická poznámka: Počáteční část hodiny je možné poměrně snadno urychlit i zpomalit. Většinou u příkladu nečekám, až ho udělají všichni, a nechám ho vypracovat pouze těm nejrychlejším, ostatní se něj jenom podívají.

Nápad funguje i pro $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$ zřejmě platí: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Vysvětluje se vzorec: $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$. ($\sqrt[np]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$)

Pedagogická poznámka: Rozdíly ve způsobu vnímání matematiky ukazuje moje neúspěšná snaha přesvědčit jednu studentku o tom, že postup $\sqrt[np]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ukazuje „krácení v odmocninách“ lépe, než jenom uvedení vzorce ve větě z minulé hodiny.

Naše úvahy nejsou matematicky dostatečně průkazné, ale jiní to dokázali za nás platí:

Pro každé kladné reálné číslo *a*, pro každé přirozené číslo *n* platí: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Pro každé kladné reálné číslo *a*, pro každé celé číslo *m*, pro každé přirozené číslo *n* platí: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Př. 4: Zapiš pomocí racionálního mocnitele:

a) $\sqrt[7]{3}$ b) $\sqrt[6]{a^3}$ c) $\sqrt[5]{a^{-6}}$ d) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6$

a) $\sqrt[7]{3} = 3^{\frac{1}{7}}$ b) $\sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$ c) $\sqrt[5]{a^{-6}} = a^{-\frac{6}{5}}$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6 = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^6} = \left(\sqrt[4]{a}\right)^{-6} = a^{-\frac{6}{4}} = a^{-\frac{3}{2}}$

Pedagogická poznámka: Problémy se vyskytují prakticky jenom v posledním bodě d), kde se snažím trvat na starém „nemusíte dělat všechno najednou, po malých správných krocích se musíte dostat až k výsledku. Většinou si ukazujeme, že právě u bodu d) správných cest existuje více.

Následkem předchozích definic se pravidla pro počítání s odmocninami sloučí s pravidly pro počítání s mocninami

Pro všechna kladná reálná čísla *a, b* a pro všechna racionální čísla *r, s* platí:

$$\left(a^r\right)^s = a^{rs} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad (ab)^r = a^r b^r$$

$$a^r a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Pedagogická poznámka: Studenti se s racionálními mocniteli sžívají pro mě až překvapivě snadno a následující příklady jim nedělají v podstatě žádné potíže. V případě bezradnosti stačí odkázat na rámeček se vzorci.

Př. 5: Zjednoduš výrazy:

a) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}}$ b) $\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}$ c) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ d) $\dfrac{a \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}}$

a) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{2+4}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

b) $\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} = a^{\frac{9\cdot 4}{2\cdot 3}} = a^{\frac{36}{6}} = a^6$

c) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{4-3}{6}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$

d) $\dfrac{a \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}} = a^{1+\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)} = a^2$

Pedagogická poznámka: U následujících příkladů se někteří vzpírají a chtějí k úpravám nadále používat odmocniny. Z cvičných důvodů trvám na použití racionálních mocnin s tím, že později si samozřejmě mohou vybrat.

Př. 6: Částečně odmocni převedením na racionálního mocnitele $\sqrt[6]{a^{15}}$.

$\sqrt[6]{a^{15}} = a^{\frac{15}{6}} = a^{\frac{5}{2}} = a^{2+\frac{1}{2}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^2\sqrt{a}$

Př. 7: Zjednoduš následující výrazy převedením na racionálního mocnitele.

a) $\sqrt[12]{2^{18}}$ b) $\sqrt[4]{4}$ c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}}$

a) $\sqrt[12]{2^{18}} = 2^{\frac{18}{12}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}} = \left(a\left(a^{10}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a \cdot a^{\frac{10}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a \cdot a^5\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^6\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

Př. 8: Vyjádři součin pomocí jediné odmocniny převedením na racionálního mocnitele.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9}$ c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3+4}{6}} = 3^{\frac{7}{6}} = 3 \cdot \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{10+5+8}{20}} = 3^{\frac{23}{20}} = 3 \cdot \sqrt[20]{3^3}$

c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}} = a^{\frac{3+4+5}{6}} = a^{\frac{12}{6}} = a^2$

Pedagogická poznámka: Další příklady následují v první polovině příští hodiny.

Př. 9: Petáková:
strana 63/cvičení 49 e) h) i)
strana 63/cvičení 50 e)
strana 63/cvičení 51 b) c) f)
strana 63/cvičení 52 c) f)

Shrnutí: Odmocniny můžeme nahradit mocninami s racionálním mocnitelem.